Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas — Departamento de Física
Mecânica Quântica I (FSC5511) — Prof. Emmanuel G. de Oliveira
Lista de problemas III — Versão de 20 de novembro de 2019

(1) O oscilador harmônico bidimensional e o tridimensional têm hamiltonianos dados por:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\mathbf{r}^2}{2} \tag{1}$$

(a) Escreva as soluções $\phi(\mathbf{r})$ em termos das soluções do oscilador harmônico unidimensional $u_n(x)$ em ambos os casos. (b) Encontre as energias possíveis e as suas respectivas multiplicidades em ambos os casos.

(2) [Bransden & Joachain] Encontre a equação da continuidade no caso de potencial complexo e a interprete fisicamente.

(3) Escreva a equação de Schrödinger para uma partícula presa em um anel fino. Encontre os autovalores e os autovetores de energia.

(4) Se por teimosia não se quer trabalhar com a matriz densidade e tenta-se definir o estado "não polarizado" para spin 1/2:

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle &= |S_z,+\rangle + |S_z,-\rangle + |S_x,+\rangle + |S_x,-\rangle \\ &\quad + |S_y,+\rangle + |S_y,-\rangle\end{aligned} \tag{2}$$

(a) Normalize este estado. (b) Calcule o valor esperado de S_z. (c) Encontre os ângulos θ e ϕ que definem este estado.

(5) Sabe-se a energia média U de um conjunto de sistemas em equilíbrio térmico. (a) Se os sistemas são de dois níveis, pode-se determinar a entropia do sistema como função da energia sem impor nenhuma outra condição? Se sim, determine a energia. Se não, encontre a distribuição de estados que maximiza a entropia por derivação explícita (não use multiplicadores de Lagrange). Para facilitar, diga que os dois níveis de energia são $\pm E/2$. (b) Repita o item "a" para o caso em que os sistemas são de três níveis. Para facilitar, diga que os dois níveis de energia são $\pm E$ e 0. (c) Em ambos os casos, encontre a energia média em função da entropia.

(6) Suponhamos por um momento que os harmônicos esféricos para momento angular semi-inteiro $l = 1/2$ existam e sejam dados por $u_\pm \propto \mathrm{e}^{\pm i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}$. Calcule $L_\pm u_+$ e explique o resultado.

(7) Usando um multiplicador de Lagrange, mostre que a entropia é máxima para o conjunto completamente aleatório e encontre o que é o multiplicador de Lagrange.

(8) [Sakurai 3.10, adapt.] (a) Prove que a evolução temporal do operador densidade ρ (na descrição de Schrödinger) é dada por:

$$\rho(t) = \mathscr{U}(t,t_0)\rho(t_0)\mathscr{U}^\dagger(t,t_0) \tag{3}$$

(b) Suponha que nós temos um conjunto puro a $t = 0$. Prove que ele não pode evoluir para um conjunto misto, desde que a evolução temporal seja governada pela equação de Schrödinger.

(9) No caso de um oscilador harmônico tridimensional:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\mathbf{r}^2}{2} \tag{4}$$

(a) Encontre os elementos $\langle n_x, n_y, n_z|k, l, m\rangle$ (não é necessário fazer a integral radial) para o caso em que $E = \frac{5}{2}\omega\hbar$ e com $l \leq 2$.

(10) [Sakurai 3.16, adapt] Uma partícula em um potencial simétrico esfericamente está em um autoestado de $\mathbf{L}^2$ e L_z com autovalores $l(l+1)\hbar^2$ e $m\hbar$, respectivamente. Prove que o valor esperado entre estados $|l,m\rangle$ satisfazem:

$$\langle L_x\rangle = \langle L_y\rangle = 0, \tag{5}$$

$$\langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle = \frac{l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2}{2} \tag{6}$$

Interprete este resultado semiclassicamente.

(11) (a) Encontre o valor esperado de J_x^2 para o estado $|j,m_z\rangle$ a partir dos operadores $J_\pm$. (b) Verifique a relação de incerteza entre J_x e J_y para o caso $m_z = j$.

(12) [Sakurai 3.22a, adapt.] Considere um sistema com $j = 1$. Escreva explicitamente em forma matricial:

$$\langle j = 1, m'|J_y|j = 1, m\rangle. \tag{7}$$

(13) No contexto de um corpo (ou rotor) rígido, considere o operador $\mathscr{J}_a = \mathbf{a}\cdot\mathbf{J}$, ou seja, a componente do momento angular na direção do eixo principal definido pelo versor $\mathbf{a}$ (os outros eixos são $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$). (a) Por que $\mathscr{J}_a$ é invariante sob rotações, por que $\mathbf{a}$ deve ser um operador e quanto valem $[\mathbf{a}, J_i]$ e $[\mathscr{J}_a, J_i]$? (b) Encontre $[\mathscr{J}_a,\mathscr{J}_b]$ (relações de comutação anômalas). (c) Dado o hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathscr{J}_a^2}{I_a} + \frac{\mathscr{J}_b^2}{I_b} + \frac{\mathscr{J}_c^2}{I_c}\right), \tag{8}$$

encontre a equação de movimento de Heisenberg para o operador $\mathscr{J}_a$.

(14) [Sakurai 3.15, adapt.] A função de onda de uma partícula sujeita a um potencial esfericamente simétrico V(r) é dada por:

$$\psi(\mathbf{r}) = (x + 2y + z)f(r). \tag{9}$$

(a) Mostre quais são os valores de l que podem ser obtidos quando aplicamos à função de onda o operador $\mathbf{L}^2$. (b) Quais são as probabilidades para a partícula ser encontrada para os diferentes estados de m_l.

(c) Suponha que de alguma maneira seja conhecido que $\psi(\mathbf{r})$ é um autoestado de energia com autovalor E. Indique como $V(r)$ poderia ser encontrado.

(15) [Sakurai 3.13, adapt.] (a) Mostre que as matrizes 3x3 dadas por

$$(G_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk} \tag{10}$$

satisfazem as relações de comutação de momento angular.

(16) Usando $\langle n', l', m'|[L^2, [L^2, z]]|n, l, m\rangle$, encontre os valores de l e l' em que $\langle n', l', m'|z|n, l, m\rangle$ pode ser não nulo.

(17) [Sakurai 3.9, adapt.] Construa a matriz densidade de um conjunto de partículas de spin 1/2 a partir das médias $[S_x]$, $[S_y]$ e $[S_z]$.

(18) [Sakurai 3.14, adapt.] (a) Usando o fato que J_x, J_y, J_z satisfazem as relações de comutação de momento angular usuais, prove que $J^2 = J_z^2 + J_+J_- - \hbar J_z$.
(d) Derive a expressão para o coeficiente c_- que aparece em $J_-\psi_{jm} = c_-\psi_{j,m-1}$.

(19) [Sakurai 5.16, adapt.] Considere uma partícula ligada a um centro fixo por um potencial $V(r)$ esfericamente simétrico.
(a) Prove que:

$$|\psi(0)|^2 = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left\langle \frac{dV}{dr} \right\rangle \tag{11}$$

para todos os estados S, fundamental ou excitados.
(b) Confira esta relação para o estado fundamental de um oscilador isotrópico tridimensional. Você pode usar:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{12}$$

(c) Confira esta relação para o estado fundamental do átomo de hidrogênio. Você pode usar:

$$R(r') = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r'/a_0} \tag{13}$$

(20) (a) No átomo de hidrogênio e usando o operador A_1, encontre a função de onda normalizada $u_{2,1}(r)$. Usando o operador $A_0^\dagger$, encontre a função de onda normalizada $u_{2,0}(r)$ a partir de $u_{2,1}(r)$ com a condição de que ela seja positiva para pequenos valores de r.

(21) (a) No átomo de hidrogênio e usando o operador A_l apropriado, encontre a função de onda normalizada $u_{3,2}(r)$. Usando o(s) operador(es) $A_l^\dagger$ apropriado, encontre a função de onda normalizada $u_{3,0}(r)$ a partir de $u_{3,2}(r)$ com a condição de que ela seja positiva para pequenos valores de r.

(22) (a) No átomo de hidrogênio e usando os operadores A_l e $A_l^\dagger$, encontre o valor esperado de r e $1/r$ nos casos de $n = 1, 2$ e 3.

Atualizações: 2019/11/13: Adicionados os problemas de números 20 a 22. 2019/11/20: Correções menores de digitação em algumas questões.