Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas — Departamento de Física
Mecânica Quântica I (FSC5511) — Prof. Emmanuel G. de Oliveira
Lista de problemas II — Versão de 25 de setembro de 2019

(1) [Sakurai 2.1, adapt.] Dado o hamiltoniano:

$$H = \omega S_z \tag{1}$$

(a) Encontre a equação de Heisenberg para os operadores S_y e S_z.
(b) Encontre a dependência temporal dos operadores $S_y(t)$ e $S_z(t)$ a partir da equação de Heisenberg.

(2) [Sakurai 1.18b, adapt.] Já foi mostrado que a igualdade na relação de incerteza é válida se o estado em questão satisfaz $\Delta A|\alpha\rangle = i\lambda\Delta B|\alpha\rangle$ com λ real. Prove que $\langle x'|\Delta x|\alpha\rangle = i\lambda\langle x'|\Delta p|\alpha\rangle$ para o pacote de onda gaussiano:

$$\langle x'|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi d^2}} \exp\left(\frac{i\langle p\rangle x'}{\hbar} - \frac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4d^2}\right), \tag{2}$$

que satisfaz a relação de incerteza mínima.

(3) [Sakurai 2.21, adap.[1]] Uma partícula está em um poço quadrado infinito com potencial $V(x) = 0$ para $0 < x < L$ e infinito nos outros casos. A tempo inicial $(t = 0)$, a partícula está localizada em $x = L/2$.
(a) Qual será a probabilidade relativa para encontrar a partícula nos vários autoestados de energia a $t = 0$?
(b) Escreva a função de onda para $t \geq 0$.

(4) [Sakurai 2.15] Considere a função, conhecida como função de correlação, definida por

$$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle, \tag{4}$$

em que $x(t)$ é o operador posição na descrição de Heisenberg. Calcule explicitamente a função de correlação para o estado fundamental de um oscilador harmônico simples unidimensional.

(5) [Sakurai 2.16] Considere de novo um oscilador harmônico simples unidimensional. Faça o seguinte algebricamente, isto é, sem usar funções de onda:
(a) Construa uma combinação linear de $|0\rangle$ e $|1\rangle$ de tal maneira que $\langle x\rangle$ é o maior possível.
(b) Suponha que o oscilador está no estado construído em (a) ao tempo $t = 0$. Qual é o vetor de estado para $t > 0$ na descrição de Schrödinger?

(6) [Sakurai 1.28, adapt.] Sejam x e p_x operadores quânticos de posição e momento linear em uma dimensão. (a) Encontre o comutador:

$$\left[x, \exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)\right] \tag{5}$$

(b) Prove que

$$\exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle \tag{6}$$

é autoestado de posição x e encontre o autovalor correspondente.

(7) [Sakurai 1.21, adapt.] Uma partícula está em um poço quadrado infinito com potencial $V(x) = 0$ para $0 < x < L$ e infinito nos outros casos. Encontre

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p_x)^2\rangle \tag{7}$$

para o estado fundamental (a) e para os estados excitados (b).

(8) [Sakurai 2.10, adapt.] Usando o oscilador harmônico simples unidimensional como exemplo, discuta como (a) as variáveis dinâmicas x e p_x e (b) o vetor de estado mais geral evoluem com o tempo em cada uma das descrições.

(9) [Sakurai 2.11, adapt.] Considere uma partícula sujeita à o potencial de oscilador harmônico simples unidimensional. Suponha que em $t = 0$ o vetor de estado é dado por:

$$\exp\left(\frac{-ip_x a}{\hbar}\right)|0\rangle \tag{8}$$

em que a é um número com dimensão de comprimento. Usando a descrição de Heisenberg, calcule o valor esperado $\langle x\rangle$ para $t \geq 0$.

(10) [Sakurai 2.12, adapt.] Para um oscilador harmônico simples unidimensional, em $t = 0$, é dado o estado:

$$\exp\left(\frac{-ip_x a}{\hbar}\right)|0\rangle \tag{9}$$

(a) Encontre a função de onda no espaço de posição.
(b) Obtenha uma expressão simples para a probabilidade de que o sistema seja encontrado no estado fundamental pata $t = 0$. Esta probabilidade muda para $t > 0$?

(11) Encontre (a) $[x,G(p_x)]$ e (b) $[F(x), p_x]$.

(12) [Sakurai 2.18, adapt.] No contexto do oscilador harmônico simples, define-se o estado coerente $|\lambda\rangle$ por meio da relação:

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \tag{10}$$

[1] Se n é inteiro:

$$\int_0^L x\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L^2}{4} \quad \text{e} \quad \int_0^L x^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L^3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}\right) \tag{3}$$

em que a é o operador de aniquilação e λ é um autovalor complexo.
(a) Mostre que

$$\mathrm{e}^{\frac{-|\lambda|^2}{2}}\mathrm{e}^{\lambda a^\dagger}|0\rangle \tag{11}$$

é um estado coerente normalizado.
(b) Mostre que para este estado vale o princípio de incerteza mínima, usando que

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}(a + a^\dagger) \tag{12}$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}(-a + a^\dagger) \tag{13}$$

(13) Suponha que exista um operador T observável tal que $[T,H] = -i\hbar$, em que H é o operador hamiltoniano. (a) Se $|a'\rangle$ é um autoestado de energia com autovalor $E_{a'}$, mostre que $\exp(i\epsilon T/\hbar)|a'\rangle$ também é um autoestado e encontre sua energia. (b) Argumente que o hamiltoniano em questão não é limitado por baixo, ou seja, não há energia mínima.

(14) Usando a translação:

$$\mathcal{T}(\Delta)|x'\rangle = |x' + \Delta\rangle \tag{14}$$

calcule

$$\mathcal{T}^\dagger(\Delta)x\mathcal{T}(\Delta). \tag{15}$$

(15) [Sakurai 1.33-a-i] Prove o seguinte:

$$\langle p'_x|x|\alpha\rangle = i\hbar\frac{d}{dp'_x}\langle p'_x|\alpha\rangle. \tag{16}$$

(16) [Sakurai 2.20, adapt.] Considere uma partícula de massa m sujeita ao seguinte potencial unidimensional:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{kx^2}{2} & \text{para } x > 0 \\ \infty & \text{para } x < 0 \end{cases} \tag{17}$$

(a) Qual é a energia do estado fundamental?
(b) Qual é o valor esperado $\langle x^2\rangle$ para o estado fundamental?

(17) Considere uma partícula em um potencial. Na descrição de Heisenberg, encontre a derivada segunda temporal do operador posição da partícula.

(18) Demonstre o teorema do virial em uma dimensão:

$$2\left\langle\frac{p_x^2}{2m}\right\rangle = \left\langle x\frac{dV(x)}{dx}\right\rangle \tag{18}$$

(19) Mais exercícios virão.

Atualizações: 2019/09/25: Adicionados os problemas de 11 a 18.