Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas — Departamento de Física
Mecânica Quântica I (FSC5511) — Prof. Emmanuel G. de Oliveira
Lista de problemas I — Versão de 6 de setembro de 2019

(1) (a) Encontre $[A,B^2]$ e $[A^2,B^2]$ em termos do comutador $[A,B]$ e de anticomutadores. (b) No caso de S_x e S_y, quais são os resultados?

(2) [Sakurai 1.7] Considere um espaço de kets gerado pelos autoestados $\{|a'\rangle\}$ de um operador hermitiano A. Não há degenerescência.
(a) Prove que

$$\prod_{a'}(A - a') \tag{1}$$

é o operador nulo.
(b) Qual é a significância de

$$\prod_{a''\neq a'} \frac{A - a''}{a' - a''}? \tag{2}$$

(c) Ilustre (a) e (b) usando A igualado a S_z de um sistema de spin 1/2.

(3) [Sakurai 1.13, adapt.] Um feixe de átomos de spin 1/2 passa por uma série de três experimentos do tipo de Stern–Gerlach:
(i) O primeiro aceita $S'_z = \hbar/2$ e rejeita $S'_z = -\hbar/2$. O resultado deste experimento é normalizado à unidade.
(ii) O segundo aceita $S'_n = \hbar/2$ e rejeita $S'_n = -\hbar/2$, em que S_n é o autovalor do operador $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$, dado que $\mathbf{n}$ está no plano zx e faz ângulo θ com o eixo z positivo.
(iii) O terceiro aceita $S'_z = -\hbar/2$ e rejeita $S'_z = \hbar/2$.
(a) Qual é a intensidade final do feixe?
(b) Como devemos orientar o segundo aparato de medida se nós queremos maximizar a intensidade do feixe final com $S'_z = -\hbar/2$?

(4) Considere o operador representado pela matriz abaixo:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) Mostre se esse operador é hermitiano ou não.
(b) Mostre se esse operador é unitário ou não.
(c) Encontre os autovalores deste operador.
(d) Se este operador é o hamiltoniano de algum sistema, como seria a evolução de um estado arbitrário deste sistema?

(5) [Sakurai 1.10] Dado o hamiltoniano:

$$H = \epsilon(|1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|) \tag{4}$$

encontre (a) as energias e (b) os autoestados normalizados correspondentes.

(6) É dado o estado $|\alpha\rangle = |S_z;+\rangle + |S_x;+\rangle$; quais são os valores esperados de S_x, S_y e S_z?

(7) [Sakurai 1.8, adapt.] Usando a ortonormalidade de $|+\rangle$ e $|-\rangle$, mostre que:

$$[S_i, S_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk}\hbar S_k \quad \text{e} \quad \{S_i,S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij} \tag{5}$$

usando $S_x = (\hbar/2)(|+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle -|), S_y = \cdots$.

(8) [Sakurai 1.19] (a) Compute

$$\left\langle (\Delta S_x)^2 \right\rangle = \langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2 \tag{6}$$

em que o valor esperado é em relação ao estado S_z+. Usando seu resultado, confirme a relação de incerteza generalizada:

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle [A,B] \rangle|^2 \tag{7}$$

com $A \to S_x$ e $B \to S_y$.
(b) Confirme a relação de incerteza com $A \to S_x$ e $B \to S_y$ para o estado S_x+.

(9) (a) Encontre os autovalores das matrizes

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

(b) Encontre os autovetores dessas matrizes.

(10) Considere o hamiltoniano:

$$H = \omega\hbar \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

e a seguinte condição inicial:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

(a) Encontre $|\alpha, t\rangle$. (b) Encontre a probabilidade de encontrar o estado inicial quando $\omega t = 3\pi/5$. (c) Encontre o operador evolução temporal para este hamiltoniano.

(11) [Sakurai 2.9, adapt.] Uma caixa contendo uma partícula está dividida entre compartimentos esquerdo e direito por uma separação fina. Se a partícula está no compartimento direito ou esquerdo, seu estado é representado pelo autovetor de posição $|R\rangle$ ou $|L\rangle$, respectivamente. A partícula pode tunelar pela separação; este tunelamento é caracterizado pelo hamiltoniano:

$$H = \Delta\left(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|\right) \tag{11}$$

em que Δ é um número real com dimensão de energia.
(a) Encontre os autoestados normalizados e os autovalores de energia.
(b) Suponha que ao tempo $t = 0$ a partícula está no compartimento direito com certeza. Qual é a probabilidade de observar a partícula no lado esquerdo como função do tempo?

(12) [Sakurai 1.14] Um certo observável em mecânica quântica tem uma representação por matriz 3×3 como:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

(a) Encontre os autovalores e os autovetores normalizados deste operador. Há alguma degenerescência?
(b) Dê um exemplo físico em que tudo isso é relevante.

(13) [Sakurai 2.3] Um elétron está sujeito a um campo magnético uniforme e independente do tempo de intensidade B com orientação do eixo z positivo. A $t = 0$ sabe-se que o elétron está em um autoestado de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ com autovalor $\hbar/2$, em que $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário pertencente ao plano xz que faz ângulo β com o eixo z.
(a) Obtenha a probabilidade de encontrar o elétron no estado $S_x' = \hbar/2$ como uma função do tempo.
(b) Encontre o valor esperado de S_x como uma função do tempo.
(c) Confira as suas respostas com os resultados esperados para (i) $\beta = 0$ e (ii) $\beta = \pi/2$.

(14) [Sakurai 1.9, adapt.] Resolvendo a equação de autovetores, construa $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle$ tal que:

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle = \frac{\hbar}{2} |\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle \tag{13}$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário com ângulo azimutal ϕ e ângulo axial θ.

(15) [Sakurai 1.12, adapt.] Sabe-se que um sistema de spin 1/2 está em um autoestado de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ com autovalor $\hbar/2$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário no plano xz que faz um ângulo γ com o eixo z positivo.
(a) Suponha que S_x é medido. Qual é a probabilidade de obter-se $+\hbar/2$?
(b) Calcule a dispersão em S_x, isto é,

$$\langle (S_x - \langle S_x \rangle)^2 \rangle \tag{14}$$

(c) Confira suas respostas para os casos especiais $\gamma = 0, \pi/2$ e π.

(16) [Sakurai 1.15, adapt.] Sejam A e B observáveis. Suponha que os autoestados simultânos de A e B formam um conjunto completo de kets de base. Podemos sempre concluir que $[A,B] = 0$? Se a sua resposta for sim, prove a igualdade. Se a sua resposta é não, dê um contraexemplo.

(17) [Sakurai 1.16, adapt.] Dois operadores hermitianos anticomutam $\{A,B\} = 0$. É possível existir um autoestado simultâneo de A e B? Prove ou exemplifique sua resposta.

(18) [Sakurai 1.17, adapt.] Sabe-se que dois observáveis A_1 e A_2, que não envolvem o tempo explicitamente, não comutam: $[A_1,A_2] \neq 0$. Ainda assim, sabe-se que ambos comutam com o hamiltoniano: $[A_1,H] = 0$, $[A_2,H] = 0$. Prove que os autoestados de energia são, em geral, degenerados. Existem exceções?

(19) [Sakurai 1.18a, adapt.] Mostre que a igualdade na relação de incerteza é válida se o estado em questão satisfaz $\Delta A|\alpha\rangle = i\lambda \Delta B|\alpha\rangle$ com λ real.

(20) [Sakurai 1.23, adapt.] Considere um espaço de kets tridimensional. Os operadores A e B são representados por:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \qquad B \doteq \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

com a e b reais.
(a) Obviamente o espectro de A é degenerado. O espectro de B também o é?
(b) Mostre que A e B comutam.
(c) Encontre um conjunto de autoestados que são simultaneamente autoestados de A e B. Especifique os autovalores de A e B para cada um dos autoestados. A sua especificação de autovalores caracteriza completamente cada autoket?

Atualizações: 2019/09/06: Foi corrigido um erro de digitação no problema 7. Foi colocada explicitamente a matriz σ_+ no problema 9. O problema 10 foi substituído. O item “b” do problema 19 foi suprimido.