Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas – Departamento de Física
Mecânica Quântica II (FSC5512) — Prof. Emmanuel G. de Oliveira
Lista de problemas II — Versão de 29 de abril de 2019

(1) [Sakurai 5.1] Um oscilador harmônico simples (em uma dimensão) está sujeito à perturbação $\lambda H_1 = bx$ com constante real b. (a) Calcule o desvio de energia do estado fundamental à ordem não nula mais baixa. (b) Resolva este problema exatamente e compare o resultado obtido no item "a". Você pode usar sem provar que:

$$\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right). \quad (1)$$

(2) [Sakurai 5.20] Estime a energia do estado fundamental de um oscilador harmônico simples unidimensional usando $\langle x|\tilde{0}\rangle = \exp(-\beta|x|)$ como função de ensaio com β a ser variado. Você pode usar que:

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha x)x^n dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}. \quad (2)$$

(3) A partir da equação $(H_0 + \lambda V)|n\rangle = E_n|n\rangle$ demonstre que o fator de normalização é $Z_n = \partial E_n/\partial E_n^{(0)}$. A partir deste resultado, qual é a primeira correção não nula à normalização? Com esta correção, qual é a probabilidade de encontrar o estado não perturbado $|k^{(0)}\rangle$ no estado perturbado $|k\rangle$ correspondente?

(4) [Sakurai 5.32, adapt.] Considere o problema do positrônio que você resolveu no Cap. 3, Probl. 3. O termo de spin-órbita neste caso não é facilmente encontrado a partir de considerações do eletromagnetismo clássico, pois não podemos dizer que uma das partículas está parada. Então consideraremos $l = 0$. Na presença de um campo magnético B uniforme e estático ao longo do eixo z, o hamiltoniano é dado por:

$$H = A\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \frac{eB}{m}(S_{1z} - S_{2z}). \quad (3)$$

(a) Resolva este problema para obter os níveis de energia de todos os quatro estados usando teoria de perturbação independente do tempo para o caso degenerado (ao invés de diagonalizar a matriz Hamiltoniana). Veja o primeiro e o segundo termos na expressão para H como H_0 e V respectivamente. Compare o seu resultado com as expressões exatas

$$E = -\frac{\hbar^2 A}{4}\left[1 \pm 2\sqrt{1 + 4\left(\frac{eB}{m\hbar A}\right)^2}\right] \quad (4)$$

para $m = 0$ (singleto ou tripleto) e

$$E = \frac{\hbar^2 A}{4} \quad (5)$$

para $m = \pm 1$ (tripleto). (b) Encontre os autoestados em primeira ordem.

(5) Considere o hamiltoniano abaixo:

$$H = \epsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

(a) Usando teoria de perturbação até segunda ordem, encontre os desvios de energia quando $\lambda \ll \epsilon$. (b) Repita o item (a) para o caso $\lambda \gg \epsilon$. (c) Encontre o raio de convergência das séries dos itens anteriores.

(6) [Sakurai 5.10, adapt.] Considere uma partícula sem spin em um poço quadrado infinito bidimensional:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le x \le L, 0 \le y \le L, \\ \infty & \text{alhures.} \end{cases} \quad (7)$$

As soluções deste sistema são:

$$\psi(x,y) = \frac{2}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \quad (8)$$

com energias $(n_x^2 + n_y^2)\hbar^2\pi^2/(2mL^2)$. É introduzida a perturbação $V_1 = \lambda xy$. Considere os três estados de menor energia.
(a) É o desvio de energia devido à perturbação linear ou quadrático em λ para cada um dos estados?
(b) Obtenha expressões para os desvios de energia dos três estados menos energéticos com precisão de ordem λ. (Você não precisa fazer as integrais que podem aparecer.)
(c) Desenhe um diagrama de energia com e sem a perturbação para os três estados de energia. Garanta que esteja especificado qual estado não perturbado está conectado a qual estado perturbado.

(7) [Weinberg 5.1] Suponha que a interação do elétron com o próton no átomo de hidrogênio produz uma uma mudança na energia potencial do elétron da forma $\Delta V(r) = V_0 \exp(-r/R)$, em que R é muito menor do que o raio de Bohr a_B. Calcule o desvio de energia dos estados do hidrogênio $2s$ e $2p$, em primeira ordem em V_0.

(8) [Sakurai 5.4, adapt.] Considere um oscilador harmônico isotrópico em duas dimensões. O hamiltoniano é dado por:

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (9)$$

A energia dos estados são: $E_n = (n+1)\hbar\omega$ e as degenerescências são: $n+1$. Aplica-se a perturbação

$$V = \delta m\omega^2 xy \quad (10)$$

em que δ é um número adimensional muito menor do que a unidade.
(a) Encontre o autoestado de energia em ordem zero e a correspondente energia em primeira ordem de teoria de perturbação para os três estados com menores energias.
(b) Resolva o problema $H_0 + V$ exatamente. Compare

com os resultados da teoria de perturbação obtidos no item "a". Você pode usar a fórmula:

$$\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right) \quad (11)$$

(9) Repita o cálculo da contribuição total de estrutura fina (interação spin–órbita mais correção relativística cinética) para o caso $j = l - 1/2$.

(10) [Sakurai 5.11, adapt.] A matriz hamiltoniana para um sistema de dois níveis pode ser escrita como ($E_2^{(0)} > E_1^{(0)}$):

$$H = \begin{bmatrix} E_1^{(0)} & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

A solução exata deste problema são as energias:

$$E_{1,2} = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)} \mp \sqrt{\left(E_2^{(0)} - E_1^{(0)}\right)^2 + 4\lambda^2\Delta^2}}{2} \quad (13)$$

e os autoestados não normalizados:

$$\chi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda\Delta}{E_1 - E_2^{(0)}} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \chi_2 = \begin{bmatrix} \frac{\lambda\Delta}{E_2 - E_1^{(0)}} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

(a) Supondo que $\lambda|\Delta| \ll |E_2^{(0)} - E_1^{(0)}|$, resolva o problema usando teoria de perturbação independente do tempo até primeira ordem para os autoestados de energia e até segunda ordem para as autoenergias. Compare com a solução exata.
(b) Suponha que as duas energias não perturbadas são quase degeneradas, isto é; $|E_2^{(0)} - E_1^{(0)}| \ll \lambda|\Delta|$. Mostre que a solução exata se parece com o que você esperaria aplicando a teoria de perturbação degenerada a este problema com $E_2^{(0)} = E_1^{(0)}$.

(11) [Sakurai 5.9, adapt.] Um elétron (desconsidere o spin) do orbital p caracterizado por $|n, l = 1, m = \pm 1{,}0\rangle$ está sob a ação do potencial $V = \lambda(x^2 - y^2)$.
(a) Encontre os autoestados que diagonalizam a perturbação. Você não precisa calcular os desvios de energia em detalhe, mas mostre que a degenerescência tripla original está agora removida completamente.

(12) Calcule o efeito Stark linear do átomo de hidrogênio para o caso $n = 3$ e $m = 0$.

(13) Encontre a energia do estado fundamental de um oscilador harmônico unidimensional usando o método variacional em a tendo como chute:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ x^2 - a^2, & |x| < a \end{cases} \quad (15)$$

(14) [Schiff 3ª ed., 8.4] Um sistema de três níveis pode ser representado pela matriz hamiltoniana:

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 & a \\ 0 & E_1 & b \\ a^* & b^* & E_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

em que $E_2 > E_1$. As quantidades a e b devem ser consideradas perturbações de mesma ordem e pequenas quando comparadas com $E_2 - E_1$. (a) Use teoria de perturbação não degenerada em segunda ordem para encontrar os autovalores perturbados. (É correto este procedimento?) (b) Diagonalize a matriz para encontrar os autovalores exatos. (c) Finalmente, use teoria de perturbação degenerada em segunda ordem. Compare os resultados obtidos.

(15) Considere o seguinte oscilador anarmônico unidimensional:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \lambda x^4 \quad (17)$$

(a) Encontre o estado de menor energia em primeira ordem de perturbação em λ.
(b) Encontre o primeiro estado excitado em primeira ordem de perturbação em λ.
(c) Para que a diferença entre as energias dos dois estados acima continue sendo $\hbar\omega$, o que deve ser feito?
(d) Com a correção do item "c", qual é a diferença de energia entre o primeiro e o segundo estados excitados (em primeira ordem em λ)?

(16) Considere que uma partícula está confinada em um anel fino centrado na origem de raio r e com o hamiltoniano dado por:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\partial_\phi^2 + \frac{m\omega^2 r^2}{8}\left(3 + \cos(4\phi)\right) \quad (18)$$

Quais são as correções de primeira ordem aos estados $n = 0, \pm 2, \pm 4$ quando o termo com o cosseno é a perturbação (ou seja, r muito pequeno)? Contudo, considere a parte com o fator 3 exatamente. Compare com a solução exata.

(17) [Sakurai 5.21, adapt.] Usando o método variacional, encontre uma estimativa para o menor autovalor λ da equação:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - |x|)\psi = 0 \quad (19)$$

com a função-chute:

$$\psi = \begin{cases} \alpha - |x|, & \text{se } |x| < \alpha \\ 0, & \text{se } |x| > \alpha \end{cases} \quad (20)$$

sabendo da seguinte informação:

$$\frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x). \quad (21)$$

(18) Analisando a renormalização do estado $|k\rangle$ em teoria de perturbação, qual é a primeira diferença entre os casos degenerado e não degenerado? Escreva as equações nas quais a diferença ocorre.

(19) [Merzbacher (2ª ed.) 17.1] O hamiltoniano de um rotor rígido em um campo magnético perpendicular ao eixo x é da forma $AL^2 + BL_z + CL_y$, se os termos quadráticos no campo são negligenciados. Supondo $B \gg C$, use a teoria de perturbação em ordem não nula mais baixa para encontrar os autovalores de energia aproximados.

(20) [Sakurai 5.13 ou Gottfried & Yan 5.12, adapt.] Calcule o efeito Stark nos níveis do hidrogênio $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ sob um campo ϵ suficientemente fraco tal que $q\epsilon a_0$ é pequeno em comparação com a estrutura fina, mas leve o desvio de Lamb $\delta = 1057\,\text{MHz}$ em consideração (isto é, ignore $2P_{3/2}$ neste cálculo). Mostre que para $q\epsilon a_0 \ll \delta$, os desvios de energia são quadráticos em ϵ, ao passo que para $q\epsilon a_0 \gg \delta$ eles são lineares em ϵ. (A integral radial que você precisa é $\langle 2s|r|2p\rangle = 3\sqrt{3}a_0$.)

(21) O termo relevante da expansão em série de Tayor que produz a correção de estrutura fina de Darwin é dado por:

$$H_{\text{Darwin}} = \frac{\overline{(\Delta \mathbf{r})^2}}{6} \nabla^2 V(\mathbf{r}) \tag{22}$$

Encontre e interprete fisicamente $\overline{(\Delta \mathbf{r})^2}$.

(22) Considere um poço quadrado infinito entre $-a < x < a$. Se você achar que é mais fácil, faça $a = 1$. (a) Encontre β e o erro do cálculo da energia com o método variacional dada a função-chute não normalizada

$$f_1(x) = x(|a|^\beta - |x|^\beta). \tag{23}$$

(b) Dada a aproximação $f_0(x) = |a|^\alpha - |x|^\alpha$ com $\alpha = (1+\sqrt{6})/2$ para o estado fundamental, monte uma função $f_2(x) = (|a^2|^\gamma - |x^2|^\gamma) - c|a|^\gamma(|a|^\gamma - |x|^\gamma)$ que seja ortogonal à $f_0(x)$. (c) Minimize $\overline{H}_2$ e encontre γ e o erro da energia.

(23) [Sakurai 5.18] Calcule o efeito quadrático de Zeeman para o estado fundamental do átomo de hidrogênio devido ao termo do hamiltoniano (usualmente negligenciado) $e^2 A^2/(2m_e)$ em primeira ordem. Escreva o desvio de energia como $\Delta = -\frac{1}{2}\chi B^2$ e obtenha uma expressão para a susceptibilidade magnética χ.

(24) Qual é a primeira correção gravitacional à energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio? Estime a ordem de grandeza da fração da correção pela energia do estado fundamental.

(25) [Sakurai 5.5, adapt.] Encontre V_{00}, V_{20} e $V_{k0}(k \neq 0$ ou $2)$ para o oscilador harmônico unidimensional dado por

$$H_0 + \lambda V = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \epsilon\frac{m\omega^2 x^2}{2}. \tag{24}$$

O último termo acima é a perturbação. Compare a energia obtida em teoria de perturbação com a solução exata.

(26) [Sakurai 5.32'] Repita o problema 4 [Sakurai 5.32, adapt.] acima, mas com o hamiltoniano do átomo de hidrogênio:

$$H = A\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \frac{eB}{m_e} S_{1z} \tag{25}$$

em que $\mathbf{S}_1$ é o spin do elétron, enquanto que $\mathbf{S}_2$ é o spin do próton, que aparece na correção hiperfina.

(27) [Sakurai 5.14, adapt.] É dado o nível $n = 3$ do átomo de hidrogênio, ignoradas as correções de estrutura fina. Encontre os desvios de energia e as correções aos autoestados devidos ao efeito Stark à menor ordem não nula.

(28) Considere um poço quadrado infinito entre $-a < x < a$, com apenas uma partícula no poço. Encontre os desvios de energia em primeira e segunda ordem e os autoestados em primeira ordem considerando as seguintes perturbações: (a) $\lambda\delta(x)$, (b) $\lambda\Theta(x)$ e (c) λx.

(29) Considere o poço quadrado infinito entre $-a < x < a$, com dois bósons no poço. No caso do estado fundamental, encontre os desvios de energia em primeira e segunda ordem e os autoestados em primeira ordem considerando a seguinte perturbação: $\lambda\delta(x_1 - x_2)$.

(30) Faça um gráfico da energia em função do campo magnético externo para os estados do átomo de hidrogênio com $n = 2$. Considere o limite em que o campo magnético é fraco.

(31) Mostre que o efeito Stark não mistura estados de diferentes números m_l, ou seja, $\langle l', m_l'|z|l, m_l\rangle = 0$ se $m_l' \neq m_l$.

Atualizações: 2019/04/26: Adicionados os exercícios 28 e 29. 2019/04/29: Adicionados os exercícios 30 e 31.