Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas – Departamento de Física
Mecânica Quântica II (FSC5512) — Prof. Emmanuel G. de Oliveira
Lista de problemas I — Versão de 12 de abril de 2019

(1) [Landau & Lifshitz 17.1, adapt.] No caso de uma onda plana tridimensional, encontre a lei de transformação da função de onda para uma transformação galileana.

(2) Suponha que exista um operador T observável tal que $[T,H] = -i\hbar$, em que H é o operador hamiltoniano. (a) Se $|a'\rangle$ é um autoestado de energia com autovalor $E_{a'}$, mostre que $\exp(i\epsilon T/\hbar)|a'\rangle$ também é um autoestado e encontre sua energia. (b) Argumente que o hamiltoniano em questão não é limitado por baixo, ou seja, não há energia mínima.

(3) [Sakurai 1.31] Usando

$$[\mathbf{r}, \mathcal{T}(d\mathbf{r}')] = d\mathbf{r}' \tag{1}$$

e

$$[\mathbf{p}, \mathcal{T}(d\mathbf{r}')] = 0, \tag{2}$$

mostre que o efeito resultante de translações infinitesimais do ket $|\alpha\rangle \to \mathcal{T}(d\mathbf{r}')|\alpha\rangle$ sobre os valores esperados é:
(a) do operador momento: $\langle \mathbf{p}\rangle \to \langle \mathbf{p}\rangle$.
(b) do operador posição: $\langle \mathbf{r}\rangle \to \langle \mathbf{r} + d\mathbf{r}'\rangle$.

(4) [Sakurai 1.33-a-i] Prove o seguinte:

$$\langle p'|x|\alpha\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle. \tag{3}$$

(5) [Sakurai 1.28, adapt.] Sejam x e p_x operadores quânticos de posição e momento linear em uma dimensão. (a) Encontre o comutador:

$$\left[x, \exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)\right] \tag{4}$$

(b) Prove que

$$\exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle \tag{5}$$

é autoestado de posição (ou seja, do operador x) e encontre o autovalor correspondente.

(6) [Sakurai 2.12, adapt.] Para um oscilador harmônico simples unidimensional, em $t = 0$, é dado o estado:

$$\exp\left(\frac{-ip_x a}{\hbar}\right)|0\rangle \tag{6}$$

(a) Encontre a função de onda no espaço de posição.
(b) Obtenha uma expressão simples para a probabilidade de que o sistema seja encontrado no estado fundamental pata $t = 0$. Esta probabilidade muda para $t > 0$?

(7) [Sakurai 1.30, adapt.] O operador translação para um deslocamento espacial finito é dado por

$$\mathcal{T}(\mathbf{l}) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{l}}{\hbar}\right) \tag{7}$$

em que $\mathbf{p}$ é o operador momento.
(a) Calcule $[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{l})]$.
(b) Usando o resultado do item "a" ou não, demonstre como o valor esperado $\langle \mathbf{x}\rangle$ muda sob translação.

(8) [Schiff 7.5, 7.6] (a) Mostre que os elementos de matriz de $\mathbf{r}$ para estados que são rotacionados pela rotação infinitesimal $\hat{\mathbf{n}}, d\phi$ são iguais aos elementos de matriz correspondentes de $\mathbf{r}_R = \mathbf{r} + \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}\, d\phi$ para estados que não foram rotacionados. (b) Repita o item anterior para os elementos de matriz de $\mathbf{J}$.

(9) Considerando as matrizes unimodulares unitárias, (a) mostre a relação:

$$U(a_1, b_1)U(a_2, b_2) = U(a_1a_2 - b_1b_2^*, a_1b_2 + a_2^*b_1) \tag{8}$$

(b) Calcule explicitamente o determinante da matriz resultante. (c) Encontre a inversa de $U(a_1, b_1)$ a partir da relação acima.

(10) Calcule os coeficientes de Clebsch-Gordan no caso de adição de três partículas de spin 1/2.

(11) [Sakurai 3.22, adapt.] Considere um sistema com $j = 1$.
(a) Escreva explicitamente em forma matricial:

$$\langle j = 1, m'|J_y|j = 1, m\rangle \tag{9}$$

(b) Encontre uma expressão polinomial de segundo grau em J_y para $e^{-iJ_y\beta/\hbar}$.
(c) Usando o resultado do item "b", encontre $d^{(j=1)}(\beta)$.

(12) [Sakurai 3.3, adapt.] É dado o hamiltoniano dependente do spin para um par elétron-pósitron na presença de um campo magnético uniforme na direção z:

$$H = A\mathbf{S}^{(e^-)}\cdot\mathbf{S}^{(e^+)} + \frac{eB}{m}\left(S_z^{(e^-)} - S_z^{(e^+)}\right) \tag{10}$$

e também o estado de spin é dado por $\chi_+^{(e^-)}\chi_-^{(e^+)}$.
(a) Suponha A = 0; o estado acima é autoestado do hamiltoniano? Se sim, encontre o autovalor de energia; se não, encontre o valor esperado do hamiltoniano.
(b) Suponha B = 0; repita o item (a).

(13) Encontre os estados do tripleto no caso em que $j_1 = 2$ e $j_2 = 1$. Use a relação:

$$J_+|j,m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\hbar|j,m+1\rangle \tag{11}$$

(14) [Sakurai 3.18, adapt.] Considere o autoestado de momento angular orbital $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponha que este estado é rotacionado por um ângulo β em torno do eixo y. Encontre a probabilidade de o novo estado ser encontrado com $m = 0, \pm 1, \pm 2$.

(15) [Sakurai 3.20, adapt.] Nós iremos adicionar momentos angulares $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$ para formar estados $j = 0,1,2$. Usando ou o método do operador escada ou a relação de recursão, expresse todos os nove $\{j,m\}$ autokets em termos de $|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle$.

(16) [Sakurai 6.1a] N partículas idênticas de spin 1/2 ...

(17) [Sakurai 6.2, adapt.] É óbvio que duas partículas distinguíveis de spin 1 sem momento angular orbital (isto é, ambas no estado s) podem formar $j = 0$, $j = 1$ e $j = 2$. (a) Encontre a simetria dos estados $|j,m\rangle$. (b) Suponha, contudo, que as duas partículas são idênticas. Quais restrições obtemos?

(18) [Sakurai 6.3] Discuta o que aconteceria ... átomo de hélio ...

(19) [Sakurai 6.4] Três partículas de spin 0 estão situadas ...

(20) [Sakurai 6.5] Considere três partículas de spin 1 idênticas que interagem fracamente. (a) ... (b) ...

(21) [Sakurai 6.7, adapt.] Dois férmions idênticos de spin 1/2 movem-se em uma dimensão sob a influência de potencial de poço quadrado infinito: $V = \infty$ para $x < 0$ ou $x > L$ e $V = 0$ para $0 \leq x \leq L$. (a) Escreva a função de onda e a energia do estado fundamental quando as duas partículas estão restritas ao estado tripleto de spin (estado *ortho*). Os estados de apenas uma partícula no poço são dados por

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{12}$$

(b) Repita o item "a" quando eles estão em um estado singleto de spin (estado *para*).

(22) (a) Faça a adição de momentum angular intrínseco de duas partículas de spin 1/2. (b) Identifique explicitamente qual é o efeito dos operadores

$$P_{+} = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} + \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{\hbar^2}\right) \tag{13}$$

(c) Escreva a matriz quatro por quatro que faz arotação deste sistema por um ângulo de 45°. (d) Discuta em quais situações poderemos encontrar o sistema com $j = 1$ e $j = 0$.

(23) Em um átomo de hidrogênio, o elétron está em um orbital com $n = 2$. (a) Encontre os possíveis valores de j e m. (b) Encontre os possíveis estados $|j,m\rangle$.

(24) No poço quadrado infinito unidimensional, temos duas partículas, nos estados n_1 e n_2. Calcule $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ nos casos em que as partículas (a) têm spin 0 e são distinguíveis, (b) têm spin 0 e são indistinguíveis e (c) têm spin 1/2 e são indistinguíveis. (d) Explique fisicamente os resultados. Sugestão: coloque o poço de $-L/2$ até $L/2$.