Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Programa de Pós-Graduação em Física
Mecânica Quântica I (FSC3310000) — Prof. Emmanuel G. de Oliveira
Lista de problemas III — Versão de 6 de junho de 2018 [1]

(1) [Sakurai 2.36, adapt.] Um elétron se move na presença de um campo magnético uniforme na direção z ($\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$). (a) Encontre $[\Pi_x, \Pi_y]$ em que $\Pi_i = p_i - eA_i$. (b) Pela comparação do Hamiltoniano e das relações de comutação obtidas no item "a" com aqueles do oscilador unidimensional, mostre como nós podemos escrever imediatamente os autovalores de energia como

$$E_{k,n} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(\frac{|eB|\hbar}{m}\right)(n + 1/2) \tag{1}$$

em que $\hbar k$ é o autovalor contínuo do operador p_z e n é um inteiro não negativo incluindo o zero.

(2) Encontre uma desigualdade de Bell e alguma violação sua para o caso de duas partícula emaranhadas de spin-1. Compare com os colegas para ver quem consegue a maior violação da desigualdade.

(3) [Sakurai 5.1] Um oscilador harmônico simples (em uma dimensão) está sujeito à perturbação $\lambda H_1 = bx$ com constante real b. (a) Calcule o desvio de energia do estado fundamental à ordem não nula mais baixa. (b) Resolva este problema exatamente e compare o resultado obtido no item "a". Você pode usar sem provar que:

$$\langle u_n'|x|u_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right). \tag{2}$$

(4) Encontre a contribuição do termo de spin de uma partícula em um campo magnético para a corrente da equação da continuidade. Reconcilie este fato com a corrente de magnetização $\boldsymbol{\nabla} \times (\psi^\dagger \boldsymbol{\mu} \psi)$.

(5) [Sakurai 5.20] Estime a energia do estado fundamental de um oscilador harmônico simples unidimensional usando $\langle x|\tilde{0}\rangle = \exp(-\beta|x|)$ como função de ensaio com β a ser variado. Você pode usar que:

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha x) x^n dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}. \tag{3}$$

(6) A partir da equação $(H_0 + \lambda V)|n\rangle = E_n|n\rangle$ demonstre que o fator de normalização é $Z_n = \partial E_n / \partial E_n^{(0)}$. A partir deste resultado, qual é a primeira correção não nula à normalização? Com esta correção, qual é a probabilidade de encontrar o estado não perturbado $|k^{(0)}\rangle$ no estado perturbado $|k\rangle$ correspondente?

(7) [Sakurai 5.32, adapt.] Considere o problema do positrônio que você resolveu no Cap. 3, Probl. 3. O termo de spin-órbita neste caso não é facilmente encontrado a partir de considerações do eletromagnetismo clássico, pois não podemos dizer que uma das partículas está parada. Então consideraremos $l = 0$. Na presença de um campo magnético B uniforme e estático ao longo do eixo z, o hamiltoniano é dado por:

$$H = A\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \frac{eB}{m}(S_{1z} - S_{2z}). \tag{4}$$

(a) Resolva este problema para obter os níveis de energia de todos os quatro estados usando teoria de perturbação independente do tempo para o caso degenerado (ao invés de diagonalizar a matriz Hamiltoniana). Veja o primeiro e o segundo termos na expressão para H como H_0 e V respectivamente. Compare o seu resultado com as expressões exatas

$$E = -\frac{\hbar^2 A}{4}\left[1 \pm 2\sqrt{1 + 4\left(\frac{eB}{m\hbar A}\right)^2}\right] \tag{5}$$

para $m = 0$ (tripleto ou singleto) e

$$E = \frac{\hbar^2 A}{4} \tag{6}$$

para $m = \pm 1$ (tripleto). (b) Encontre os autoestados em primeira ordem.

(8) Considere o hamiltoniano abaixo:

$$H = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

(a) Usando teoria de perturbação até segunda ordem, encontre os desvios de energia quando $\lambda \ll \epsilon$. (b) Repita o item (a) para o caso $\lambda \gg \epsilon$. (c) Encontre o raio de convergência das séries dos itens anteriores.

(9) [Sakurai 5.10, adapt.] Considere uma partícula sem spin em um poço quadrado infinito bidimensional:

$$V = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le x \le L, 0 \le y \le L, \\ \infty & \text{alhures.} \end{cases} \tag{8}$$

As soluções deste sistema são:

$$\psi(x,y) = \frac{2}{L}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \tag{9}$$

com energias $(n_x^2 + n_y^2)\hbar^2\pi^2/(2mL^2)$. É introduzida a perturbação $V_1 = \lambda xy$. Considere os três estados de menor energia.
(a) É o desvio de energia devido à perturbação linear ou quadrático em λ para cada um dos estados?
(b) Obtenha expressões para os desvios de energia dos três estados menos energéticos com precisão de ordem

[1] Pequenas modificações em 2018/Junho/12: foi alterado o hamiltoniano na questão 31; a questão 35 foi completada; a questão 36 foi corrigida: λ virou β.

λ. (Você não precisa fazer as integrais que podem aparecer.)
(c) Desenhe um diagrama de energia com e sem a perturbação para os três estados de energia. Garanta que esteja especificado qual estado não perturbado está conectado a qual estado perturbado.

(10) [Weinberg 5.1] Suponha que a interação do elétron com o próton no átomo de hidrogênio produz uma uma mudança na energia potencial do elétron da forma $\Delta V(r) = V_0 \exp(-r/R)$, em que R é muito menor do que o raio de Bohr a_B. Calcule o desvio de energia dos estados do hidrogênio $2s$ e $2p$, em primeira ordem em V_0.

(11) [Sakurai 2.33, adapt.] Mostre que o formalismo da mecânica ondulatória aplicado ao problema de interferência quântica induzida pela gravitação discutido na seção 2.6 também leva à expressão para a diferença de fase dada por:

$$\delta\phi = -\frac{m_n^2 g l_1 l_2 \lambda \sin\delta}{2\pi\hbar^2} \tag{10}$$

(12) Calcule $\langle \mathbf{r} \times \mathbf{\Pi} \rangle_{n=2,l,m}$ no caso de um campo magnético constante $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$.

(13) [Sakurai 5.4, adapt.] Considere um oscilador harmônico isotrópico em duas dimensões. O hamiltoniano é dado por:

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{11}$$

A energia dos estados são: $E_n = (n+1)\hbar\omega$ e as degenerescências são: $n+1$. Aplica-se a perturbação

$$V = \delta m\omega^2 xy \tag{12}$$

em que δ é um número adimensional muito menor do que a unidade.
(a) Encontre o autoestado de energia em ordem zero e a correspondente energia em primeira ordem de teoria de perturbação para os três estados com menores energias.
(b) Resolva o problema $H_0 + V$ exatamente. Compare com os resultados da teoria de perturbação obtidos no item "a". Você pode usar a fórmula:

$$\langle n'|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}\right) \tag{13}$$

(14) Repita o cálculo da contribuição total de estrutura fina (interação spin–órbita mais correção relativística cinética) para o caso $j = l - 1/2$.

(15) [Sakurai 5.11, adapt.] A matriz hamiltoniana para um sistema de dois níveis pode ser escrita como ($E_2^{(0)} > E_1^{(0)}$):

$$H = \begin{bmatrix} E_1^{(0)} & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2^{(0)} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

A solução exata deste problema são as energias:

$$E_{1,2} = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)} \mp \sqrt{\left(E_2^{(0)} - E_1^{(0)}\right)^2 + 4\lambda^2\Delta^2}}{2} \tag{15}$$

e os autoestados não normalizados:

$$\chi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda\Delta}{E_1 - E_2^{(0)}} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \chi_2 = \begin{bmatrix} \frac{\lambda\Delta}{E_2 - E_1^{(0)}} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

(a) Supondo que $\lambda|\Delta| \ll |E_2^{(0)} - E_1^{(0)}|$, resolva o problema usando teoria de perturbação independente do tempo até primeira ordem para os autoestados de energia e até segunda ordem para as autoenergias. Compare com a solução exata.
(b) Suponha que as duas energias não perturbadas são quase degeneradas, isto é; $|E_2^{(0)} - E_1^{(0)}| \ll \lambda|\Delta|$. Mostre que a solução exata se parece com o que você esperaria aplicando a a teoria de perturbação degenerada a este problema com $E_2^{(0)} = E_1^{(0)}$.

(16) Demonstre a equivalência do formalismo de integral de caminho e a eq. de Schrödinger.

(17) [Sakurai 5.9] Um elétron (desconsidere o spin) do orbital p caracterizado por $|n, l=1, m=\pm1{,}0\rangle$ está sobre a ação do potencial $V = \lambda(x^2 - y^2)$.
(a) Encontre os autoestados que diagonalizam a perturbação. Você não precisa calcular os desvios de energia em detalhe, mas mostre que a degenerescência tripla original está agora removida completamente.
(b) Porque V é invariante sob a reversão temporal e porque agora já não há degenerescência, nós esperamos que cada autoestado do item "a" vá para si mesmo (a menos de uma fase) sob a reversão temporal. Verifique esta afirmação explicitamente.

(18) Calcule o efeito Stark linear do átomo de hidrogênio para o caso $n = 3$ e $m = 0$.

(19) [Sakurai 5.16, adapt.] Considere uma partícula ligada a um centro fixo por um potencial $V(r)$ esfericamente simétrico.
(a) Prove que:

$$|\psi(0)|^2 = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left\langle \frac{dV}{dr} \right\rangle \tag{17}$$

para todos os estados s, fundamental ou excitados.
(b) Confira esta relação para o estado fundamental de um oscilador isotrópico tridimensional. Você pode usar:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \tag{18}$$

(c) Confira esta relação para o estado fundamental do átomo de hidrogênio. Você pode usar:

$$R(r') = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r'/a_0} \tag{19}$$

(20) Usando a aproximação semiclássica, em particular a regra de quantização, encontre as energias do poço quadrado infinito unidimensional, do oscilador harmônico unidimensional e do átomo de hidrogênio (parte radial) para $l = 0$ e para $l > 0$.

(21) [Sakurai 2.34, adapt.] (a) Demonstre as relações:

$$[\Pi_i, \Pi_j] = i\hbar q \epsilon_{ijk} B_k \tag{20}$$

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q\left[\mathbf{E} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right] \tag{21}$$

(b) Obtenha a equação da continuidade na presença de campo magnético e encontre o fluxo de probabilidade $\mathbf{j}$.

(22) Encontre a energia do estado fundamental de um oscilador harmônico unidimensional usando o método variacional em a tendo como chute:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a \\ x^2 - a^2, & |x| < a \end{cases} \tag{22}$$

(23) [Schiff 3ª ed., 8.4] Um sistema de três níveis pode ser representado pela matriz hamiltoniana:

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 & a \\ 0 & E_1 & b \\ a^* & b^* & E_2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

em que $E_2 > E_1$. As quantidades a e b devem ser consideradas perturbações de mesma ordem e pequenas quando comparadas com $E_2 - E_1$. (a) Use teoria de perturbação não degenerada em segunda ordem para encontrar os autovalores perturbados. (É correto este procedimento?) (b) Diagonalize a matriz para encontrar os autovalores exatos. (c) Finalmente, use teoria de perturbação degenerada em segunda ordem. Compare os resultados obtidos.

(24) Considere o seguinte oscilador anarmônico unidimensional:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \lambda x^4 \tag{24}$$

(a) Encontre o estado de menor energia em primeira ordem de perturbação em λ.
(b) Encontre o primeiro estado excitado em primeira ordem de perturbação em λ.
(c) Para que a diferença entre as energias dos dois estados acima continue sendo $\hbar\omega$, o que deve ser feito?
(d) Com a correção do item "c", qual é a diferença de energia entre o primeiro e o segundo estados excitados (em primeira ordem em λ)?

(25) [Sakurai 2.35, adapt.] Considere o hamiltoniano de uma partícula sem spin de carga q. Na presença de campo magnético estático, os termos de interação são gerados pela substituição:

$$\mathbf{p} \to \mathbf{p} - q\mathbf{A} \tag{25}$$

em que $\mathbf{A}$ é o potencial vetorial. Se o campo é uniforme e aponta na orientação positiva de z, encontre o hamiltoniano dependente do momento angular $\mathbf{L}$ e discuta o significado de cada termo.

(26) Considere que uma partícula está confinada em um anel fino centrado na origem de raio r e com o hamiltoniano dado por:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\partial_\phi^2 + \frac{m\omega^2 r^2}{8}\left(3 + \cos(4\phi)\right) \tag{26}$$

Quais são as correções de primeira ordem aos quatro estados de menor energia quando o termo com o cosseno é a perturbação? Compare com a solução exata.

(27) [Sakurai 5.21, adapt.] Usando o método variacional, encontre uma estimativa para o menor autovalor λ da equação:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - |x|)\psi = 0 \tag{27}$$

com a função-chute:

$$\psi = \begin{cases} \alpha - |x|, & \text{se } |x| < \alpha \\ 0, & \text{se } |x| > \alpha \end{cases} \tag{28}$$

sabendo da seguinte informação:

$$\frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x). \tag{29}$$

(28) No teletransporte de uma partícula 1/2, foram necessárias duas medidas. Com apenas uma medida, seria possível transmitir parcialmente a informação contida no estado? Algo como apenas a fase relativa entre c_1 e c_2 ou o módulo $|c_1|$?

(29) [Merzbacher (2ª ed.) 17.11] Usando o hamiltoniano de um elétron atômico em um campo magnético, determine, para um estado de momento angular igual a zero, o desvio na energia a ordem B^2, se o sistema está um um campo magnético uniforme representado pelo potencial vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$. Definindo a suscetibilidade diamagnética atômica χ a partir de $E = -\chi B^2/2$, calcule χ para um átomo de hélio no estado fundamental e compare com o resultado medido: $-1{,}43 \times 10^{13}\,\mathrm{m}^3$. Você pode usar

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{Z_{\text{eff}}}{\pi a_0^3} \exp\left(\frac{-Z_{\text{eff}}(r_1 + r_2)}{a_0}\right) \tag{30}$$

em que $Z_{\text{eff}} = 2 - 5/16$.

(30) Analisando a renormalização do estado $|k\rangle$ em teoria de perturbação, qual é a primeira diferença entre os casos degenerado e não degenerado? Escreva as equações nas quais a diferença ocorre.

(31) [Merzbacher (2ª ed.) 17.1] O hamiltoniano de um rotor rígido em um campo magnético perpendicular ao eixo x é da forma $AL^2 + BL_z + CL_y$, se os termos quadráticos no campo são negligenciados. Supondo $B \gg C$, use a teoria de perturbação em ordem não nula mais baixa para encontrar os autovalores de energia aproximados.

(32) Considere que um sistema de dois níveis seja preparado em um estado $c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$. O sistema está em contato com um sistema muito maior (um banho), de tal forma que, após um certo tempo, o estado é dado por: $c_+|+\rangle + \mathrm{e}^{i\phi}c_-|-\rangle$ com probabilidade dada por uma distribuição gaussiana em ϕ. Encontre a nova matriz densidade e discuta o que deve acontecer quanto $t \to \infty$.

(33) [Sakurai 5.13 ou Gottfried & Yan 5.12, adapt.] Calcule o efeito Stark nos níveis do hidrogênio $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ sob um campo ϵ suficientemente fraco tal que $e\epsilon a_0$ é pequeno em comparação com a estrutura fina, mas leve o desvio de Lamb $\delta = 1057\,\mathrm{MHz}$ em consideração (isto é, ignore $3P_{1/2}$ neste cálculo). Mostre que para $e\epsilon a_0 \ll \delta$, os desvios de energia são quadráticos em ϵ, ao passo que para $e\epsilon a_0 \gg \delta$ eles são lineares em ϵ. (A integral radial que você precisa é $\langle 2s|r|2p\rangle = 3\sqrt{3}a_0$.)

(34) O termo relevante da expansão em série de Tayor que produz a correção de estrutura fina de Darwin é dado por:

$$H_{\text{Darwin}} = \frac{\overline{(\Delta\mathbf{r})^2}}{6}\nabla^2 V(\mathbf{r}) \tag{31}$$

Encontre e interprete fisicamente $\overline{(\Delta\mathbf{r})^2}$.

(35) [Sakurai 2.31, adapt.] A expressão para a ação clássica para um oscilador harmônico simples para um intervalo de tempo finito é dada por:

$$S(t_n, t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dt}{2}\,\left(m\dot{x}^2 - m\omega^2 x^2\right) \tag{32}$$

Construa $\langle x_n, t_n|x_{n-1}, t_{n-1}\rangle$ para um oscilador harmônico simples usando a prescrição de Feynman para $t_n - t_{n-1} = \Delta t$ pequeno. Mantendo apenas termos até a ordem de $(\Delta t)^2$, mostre que este resultado está em completa concordância com o limite $t - t_0 \to 0$ do propagador dado por:

$$K(x,t;x_0,t_0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega(t-t_0))}} \times \mathrm{e}^{\frac{im\omega}{2\hbar\sin(\omega(t-t_0))}\left[(x^2+x_0^2)\cos(\omega(t-t_0))-2xx_0\right]} \tag{33}$$

(36) Considere um poço quadrado infinito entre $-a < x < a$. Se você achar que é mais fácil, faça $a = 1$. (a) Encontre β e o erro do cálculo da energia com o método variacional dada a função-chute não normalizada

$$f_1(x) = x(|a|^\beta - |x|^\beta). \tag{34}$$

(b) Dada a aproximação $f_0(x) = |a|^\alpha - |x|^\alpha$ com $\alpha = (1+\sqrt{6})/2$ para o estado fundamental, monte uma função $f_2(x) = (|a^2|^\gamma - |x^2|^\gamma) - c|a|^\gamma(|a|^\gamma - |x|^\gamma)$ que seja ortogonal à $f_0(x)$. (c) Minimize $\overline{H}_2$ e encontre γ e o erro da energia.

(37) [Sakurai 5.18] Calcule o efeito quadrático de Zeeman para o estado fundamental do átomo de hidrogênio devido ao termo do hamiltoniano (usualmente negligenciado) $e^2A^2/(2m_e)$ em primeira ordem. Escreva o desvio de energia como $\Delta = -\frac{1}{2}\chi B^2$ e obtenha uma expressão para a susceptibilidade magnética χ.

(38) Considere uma partícula movendo-se em uma dimensão com energia potencial dada por:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } 0 < x < L \\ V_0 + F_0(L-x), & \text{se } L < x \end{cases} \tag{35}$$

A energia do estado fundamental no poço é aproximadamente a mesma de um poço infinito (ou seja, V_0 é muito grande). Calcule a probabilidade por unidade de tempo de uma partícula escapar do poço usando a aproximação semiclássica. A partir deste valor, encontre a meia vida do estado no poço. Quando esta aproximação é válida?

(39) [Sakurai 2.37] Considere um interferômetro de nêutrons em que as partículas seguem os caminhos A e B de mesmo tamanho, mas no caminho A são expostas em um trecho de tamanho l à um campo magnético constante B. Prove que

$$B = \frac{8\pi^2\hbar}{|e|g_n\lambda l} \tag{36}$$

é o campo necessário para produzir dois máximos sucessivos nas taxas de contagens. A constante $g_n = -1.91$ é o momento magnético do nêutron em unidades de $-e\hbar/(2m_n)$.

(40) Qual é a primeira correção gravitacional à energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio? Estime a ordem de grandeza da fração da correção pela energia do estado fundamental.

(41) [Sakurai 5.5, adapt.] Encontre V_{00}, V_{20} e $V_{k0}(k \neq 0 \text{ ou } 2)$ para o oscilador harmônico unidimensional dado por

$$H_0 + \lambda V = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} + \epsilon\frac{m\omega^2x^2}{2}. \tag{37}$$

(42) Encontre o propagador no caso de um poço de potencial infinito.

(43) [Sakurai 5.32'] Repita o problema 7 [Sakurai 5.32, adapt.] acima, mas com o hamiltoniano do átomo de hidrogênio:

$$H = A\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 + \frac{eB}{m_e}S_{1z} \tag{38}$$

em que $\mathbf{S}_1$ é o spin do elétron, enquanto que $\mathbf{S}_2$ é o spin do próton, que aparece na correção hiperfina.

(44) [Sakurai 5.14, adapt.] É dado o nível $n = 3$ do átomo de hidrogênio, ignoradas as correções de estrutura fina. Encontre os desvios de energia e às correções aos autoestados devidos ao efeito Stark à menor ordem não nula.

(45) [Merzbacher (2ª ed.) 17.17 & Sakurai 5.6] Um oscilador harmônico simples levemente anisotrópico tem $\omega = \omega_x = \omega_y \approx \omega_z$. Uma partícula carregada move-se no campo deste oscilador e também está exposta a um campo magnético uniforme na direção do eixo x. Supondo que o desdobramento de Zeeman é comparável ao causado pela anisotropia, mas pequeno quando comparado com $\hbar\omega$, calcule até primeira ordem as energias das componentes do primeiro estado excitado. Discuta os variados casos limites.