Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Programa de Pós-Graduação em Física
Mecânica Quântica I (FSC3310000) — Prof. Emmanuel G. de Oliveira
Lista de problemas II — Versão de 27 de abril de 2018

(1) Suponhamos por um momento que os harmônicos esféricos para momento angular semi-inteiro $l = 1/2$ existam e sejam dados por $u_\pm \propto \mathrm{e}^{\pm i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}$. Calcule $L_\pm u_+$ e explique o resultado.

(2) [Sakurai 3.2, adapt.] Considere a matriz 2×2 definida por:

$$U = \frac{a_0 + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}}{a_0 - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}} \tag{1}$$

em que são reais a_0 e as componentes do vetor tridimensional $\mathbf{a}$.
(a) Prove que U é unitária e unimodular.
(b) Em geral, uma matriz unitária unimodular representa uma rotação em três dimensões. Encontre o eixo e o ângulo de rotação apropriados para U em termos de a_0, a_1, a_2 e a_4.

(3) Usando um multiplicador de Lagrange, mostre que a entropia é máxima para o conjunto completamente aleatório e encontre o que é o multiplicador de Lagrange.

(4) [Sakurai 3.11, adapt.] Considere um conjunto de sistemas de spin 1. A matriz densidade agora é uma matriz 3×3. Quantas variáveis reais são necessárias para caracterizar a matriz densidade? O que deve ser conhecido além de $[S_x]$, $[S_y]$ e $[S_z]$ para caracterizar o conjunto completamente? (Inclua a demonstração.)

(5) Considere um sistema composto de dois subsistemas de spin 1/2 (A e B). Encontre o operador densidade reduzido $\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho) = \sum_{m_B}\langle m_B|\rho|m_B\rangle$ nos casos em que $|\alpha\rangle = |{+}{+}\rangle$ e $|\alpha\rangle = (|{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle)/\sqrt{2}$. No segundo caso, ρ e ρ_A descrevem estados puros ou mistos?

(6) [Sakurai 4.3, adapt.] Sabe-se que um estado quântico $|\alpha\rangle$ é um autovetor simultâneo de dois operadores hermitianos que anticomutam: $AB + BA = 0$. O que você pode dizer sobre os autovalores de A e B para o estado ψ? Ilustre seu argumento usando o operador paridade (que pode ser escolhido de tal maneira que satisfaça $\pi = \pi^{-1} = \pi^\dagger$) e o operador momento p_x.

(7) [Schiff 7.5, 7.6] (a) Mostre que os elementos de matriz de $\mathbf{r}$ para estados que são rotacionados pela rotação infinitesimal $\hat{\mathbf{n}}, d\phi$ são iguais aos elementos de matriz correspondentes de $\mathbf{r}_R = \mathbf{r} + \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}\, d\phi$ para estados que não foram rotacionados. (b) Repita o item anterior para os elementos de matriz de $\mathbf{J}$.

(8) [Sakurai 4.4, adapt.] Uma partícula de spin 1/2 está em um estado ligado a um centro fixo por um potencial esfericamente simétrico. (a) Expresse $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r})\mathscr{Y}_{l=0}^{j=1/2,m=1/2}$ em termos de outros $\mathscr{Y}_l^{j,m}$. (b) Mostre que o resultado do item "a" pode ser entendido a partir das propriedades de transformação do operador $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r})$ sob rotações e inversão espacial.

(9) Considerando as matrizes unimodulares unitárias, (a) mostre a relação:

$$U(a_1, b_1)U(a_2, b_2) = U(a_1a_2 - b_1b_2^*, a_1b_2 + a_2^*b_1) \tag{2}$$

(b) Calcule explicitamente o determinante da matriz resultante. (c) Encontre a inversa de $U(a_1, b_1)$ a partir da relação acima.

(10) [Sakurai 4.7, adapt.] (a) Seja $\psi(\mathbf{r}, t)$ a função de onda de uma partícula sem spin correspondendo à uma onda plana em três dimensões. Mostre que $\psi^*(\mathbf{r}, -t)$ é a função de onda para a onda plana com a orientação do momento revertida.
(b) Seja $\chi(\hat{\mathbf{n}})$ o autoespinor de duas componentes de $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ com autovalor $+1$. Usando a forma explícita de $\chi(\hat{\mathbf{n}})$ (em termos dos ângulos polar e azimutal β e γ que caracterizam $\hat{\mathbf{n}}$), verifique que $-i\sigma_2\chi^*(\hat{\mathbf{n}})$ é o autoespinor de duas componentes com o sentido do spin revertido.

(11) Encontre a transformação unitária que relaciona a representação adjunta com a de spin-1 para o grupo SU(2).

(12) [Sakurai 4.11, adapt.] Uma partícula sem spin está submetida a um potencial (real) que a localiza próxima à origem e não há degenerescência no espectro do hamiltoniano. Encontre $\langle\mathbf{L}\rangle$ para qualquer autoestado de energia.

(13) Calcule os coeficientes de Clebsch-Gordan no caso de adição de três partículas de spin-1/2.

(14) [Sakurai 3.10, adapt.] (a) Prove que a evolução temporal do operador densidade ρ (na descrição de Schrödinger) é dada por:

$$\rho(t) = \mathscr{U}(t,t_0)\rho(t_0)\mathscr{U}^\dagger(t,t_0) \tag{3}$$

(b) Suponha que nós temos um conjunto puro a $t = 0$. Prove que ele não pode evoluir para um conjunto misto, desde que a evolução temporal seja governada pela equação de Schrödinger.

(15) No caso de um oscilador harmônico tridimensional:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\mathbf{r}^2}{2} \tag{4}$$

(a) Escreva as soluções $\phi(\mathbf{r})$ em termos das soluções do oscilador harmônico unidimensional $u_n(x)$. (b) Encontre as energias possíveis e as suas respectivas multiplicidades. (c) Encontre os elementos $\langle n_x, n_y, n_z|k, l, m\rangle$ para o caso em que $E = \frac{5}{2}\omega\hbar$.

(16) [Sakurai 3.16, adapt] Uma partícula em um potencial simétrico esfericamente está em um autoestado de $\mathbf{L}^2$ e L_z com autovalores $l(l+1)\hbar^2$ e $m\hbar$, respectivamente. Prove que o valor esperado entre estados $|l,m\rangle$ satisfazem:

$$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0, \tag{5}$$

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2}{2} \tag{6}$$

Interprete este resultado semiclassicamente.

(17) (a) Encontre o valor esperado de J_x^2 para o estado $|j,m_z\rangle$ a partir dos operadores $J_\pm$. (b) Verifique a relação de incerteza entre J_x e J_y para o caso $m_z = j$.

(18) [Sakurai 3.22, adapt.] Considere um sistema com $j = 1$.
(a) Escreva explicitamente em forma matricial:

$$\langle j = 1, m' | J_y | j = 1, m \rangle \tag{7}$$

(b) Encontre uma expressão polinomial de segundo grau em J_y para $e^{-iJ_y\beta/\hbar}$.
(c) Usando o resultado do item "b", encontre $d^{(j=1)}(\beta)$.

(19) Se por teimosia não se quer trabalhar com a matriz densidade e tenta-se definir o estado "não polarizado"para spin-1/2:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle = |S_z, +\rangle + |S_z, -\rangle + |S_x, +\rangle + |S_x, -\rangle \\ + |S_y, +\rangle + |S_y, -\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

(a) Normalize este estado. (b) Calcule o valor esperado de S_z. (c) Encontre os ângulos θ e ϕ que definem este estado.

(20) [Sakurai 4.9, adapt.] Faça $\phi(\mathbf{p}')$ ser a função de onda no espaço de momento para o estado $|\alpha\rangle$, isto é, $\phi(\mathbf{p}') = \langle \mathbf{p}' | \alpha \rangle$. É a função de onda no espaço de momento para o estado revertido temporalmente $\Theta|\alpha\rangle$ dada por $\phi(\mathbf{p}')$, $\phi(-\mathbf{p}')$, $\phi^*(\mathbf{p}')$ ou $\phi^*(-\mathbf{p}')$? Justifique sua resposta.

(21) Considere o hamiltoniano bidimensional:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + m\omega^2 \frac{x^4 + y^4}{2a_0^2} \tag{9}$$

(a) Encontre $[H, L_z]$. (b) Qual é o grupo de simetria do hamiltoniano? (c) De agora em diante, considere que a partícula está confinada em um anel fino centrado na origem de raio $r = a_0$. Solucione a parte azimutal exatamente. (d) Desenvolva a aproximação de primeiros vizinhos, encontre Δ e discuta o quão boa é a aproximação.

(22) [Sakurai 3.3, adapt.] É dado o hamiltoniano dependente do spin para um par elétron-pósitron na presença de um campo magnético uniforme na direção z:

$$H = A\mathbf{S}^{(e^-)} \cdot \mathbf{S}^{(e^+)} + \frac{eB}{m}\left(S_z^{(e^-)} - S_z^{(e^+)}\right) \tag{10}$$

e também o estado de spin é dado por $\chi_+^{(e^-)}\chi_-^{(e^+)}$.
(a) Suponha A = 0; o estado acima é autoestado do hamiltoniano? Se sim, encontre o autovalor de energia; se não, encontre o valor esperado do hamiltoniano.
(b) Suponha B = 0; repita o item (a).

(23) [Messiah 13.12] Considere uma partícula de spin 1/2. Mostre que no subespaços dos estados de momento angular orbital dado por l, os operadores:

$$\frac{(l+1) + 2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}/\hbar^2}{(2l+1)}, \qquad \frac{l - 2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}/\hbar^2}{(2l+1)} \tag{11}$$

são projetores nos estados de momento angular total $j = l + 1/2$ e $j = l - 1/2$ respectivamente.

(24) [Sakurai 3.7, adapt.] (a) Qual é o significado da seguinte equação:

$$U^{-1} A_k U = \sum R_{kl} A_l \tag{12}$$

em que os três A_k são matrizes?
(b) Mostre a transformação dos elementos de matriz $\langle m | A_k | n \rangle$.

(25) [Weinberg 4.5] Uma partícula de spin 3/2 decai em um nucleon e um píon. Considere que a paridade é conservada neste decaimento. Mostre como a distribuição angular no estado final (sem que os spins sejam medidos) pode ser usada para determinar a paridade da partícula que decai.

(26) [Sakurai 3.15, adapt.] A função de onda de uma partícula sujeita a um potencial esfericamente simétrico V(r) é dada por:

$$\psi(\mathbf{r}) = (x + y + 3z) f(r). \tag{13}$$

(a) Mostre quais são os valores de l que podem ser obtidos quando aplicamos à função de onda o operador $\mathbf{L}^2$.
(b) Quais são as probabilidades para a partícula ser encontrada para os diferentes estados de m_l.
(c) Suponha que de alguma maneira seja conhecido que $\psi(\mathbf{r})$ é um autoestado de energia com autovalor E. Indique como $V(r)$ poderia ser encontrado.

(27) [Messiah 15.8] Mostre que os operadores de translação, rotação e inversão de paridade comutam com o operador de reversão temporal e que esta propriedade não depende da escolha da fase arbitrária envolvida na definição do operador de reversão temporal.

(28) [Sakurai 4.2, adapt.] (a) O operador translação comuta com o operador paridade? Mostre.
(b) O operador rotação comuta com o operador paridade? Mostre.

(29) (a) Se $\Theta = UK$, encontre U na representação de momentum linear, na qual vale $K_{\mathbf{p}}|\mathbf{p}'\rangle = |\mathbf{p}'\rangle$. (b) Mostre o efeito de $K_{\mathbf{p}}|\mathbf{r}'\rangle$.

(30) [Sakurai 4.12, adapt.] Para uma partícula de spin 1 com hamiltoniano dado por:

$$H = AS_z^2 + B(S_x^2 - S_y^2) \tag{14}$$

(a) Deduza (por cálculo ou por argumentos físicos) se o hamiltoniano é invariante frente à reversão temporal.
(b) Encontre os autoestados normalizados deste hamiltoniano e mostre como eles se transformam sob a reversão temporal.

(31) [Messiah 15.11] Suponha que nós temos um sistema que é invariante com relação a reversão temporal Θ. Seja A um observável ímpar com relação à Θ deste sistema. Mostre que (a) Se um estado estacionário é não-degenerado, o valor esperado de A com relação à este estado é nulo; (b) o traço da projeção de A no subespaço de qualquer autovalor de energia é nulo.

(32) [Sakurai 3.13, adapt.] (a) Mostre que as matrizes 3x3 dadas por

$$(G_i)_{jk} = -i\hbar\epsilon_{ijk} \tag{15}$$

satisfazem as relações de comutação de momento angular.

(33) Usando $\langle n', l', m'|[L^2, [L^2, z]]|n, l, m\rangle$, encontre os valores de l e l' em que $\langle n', l', m'|z|n, l, m\rangle$ pode ser não nulo.

(34) [Sakurai 3.9, adapt.] Construa a matriz densidade de um conjunto de partículas de spin 1/2 a partir das médias $[S_x]$, $[S_y]$ e $[S_z]$.

(35) No contexto de um corpo (ou rotor) rígido, considere o operador $\mathscr{J}_a = \mathbf{a}\cdot\mathbf{J}$, ou seja, a componente do momento angular na direção do eixo principal definido pelo versor $\mathbf{a}$ (os outros eixos são $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$). (a) Por que $\mathscr{J}_a$ é invariante sob rotações, por que $\mathbf{a}$ deve ser um operador e quanto valem $[\mathbf{a}, J_i]$ e $[\mathscr{J}_a, J_i]$? (b) Encontre $[\mathscr{J}_a, \mathscr{J}_b]$ (relações de comutação anômalas). (c) Dado o hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathscr{J}_a^2}{I_a} + \frac{\mathscr{J}_b^2}{I_b} + \frac{\mathscr{J}_c^2}{I_c}\right), \tag{16}$$

encontre a equação de movimento de Heisenberg para o operador $\mathscr{J}_a$.

(36) [Sakurai 3.14, adapt.] (a) Usando o fato que J_x, J_y, J_z satisfazem as relações de comutação de momento angular usuais, prove que $J^2 = J_z^2 + J_+J_- - \hbar J_z$.
(d) Derive a expressão para o coeficiente c_- que aparece em $J_-\psi_{jm} = c_-\psi_{j,m-1}$.

(37) [Sakurai 4.8, adapt.] (a) Supondo que o hamiltoniano é invariante sob a reversão temporal, prove que a função de onda para um sistema sem spin e não degenerado a qualquer instante de tempo pode ser sempre escolhida para ser real.
(b) A função de onda de um estado de onda plana para $t = 0$ é dada pela função complexa $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$. Por que isso não viola a invariância sob reversão temporal?

(38) [Sakurai 3.18, adapt.] Considere o autoestado de momento angular orbital $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponha que este estado é rotacionado por um ângulo β em torno do eixo y. Encontre a probabilidade de o novo estado ser encontrado com $m = 0, \pm1, \pm2$.

(39) [Sakurai 4.10, adapt.] (a) Qual é o estado revertido temporalmente correspondente a $\mathscr{D}(R)|j,m\rangle$?
(b) Usando as propriedades da reversão temporal e das rotações, prove:

$$\mathscr{D}^{(j)*}_{m'm}(R) = (-1)^{m-m'}\mathscr{D}^{(j)}_{-m',-m}(R) \tag{17}$$

(c) Prove que $\Theta|j,m\rangle = i^{2m}|j,-m\rangle$.

(40) [Sakurai 3.20, adapt.] Nós iremos adicionar momentos angulares $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$ para formar estados $j = 0,1,2$. Usando ou o método do operador escada ou a relação de recursão, expresse todos os nove $\{j,m\}$ autokets em termos de $|j_1,j_2; m_1, m_2\rangle$.

(41) [Sakurai 4.5, adapt.] Por causa de interações fracas (de corrente neutra) há em um átomo um potencial que viola a paridade entre o elétron e o núcleo como o seguinte:

$$V = \lambda\left(\delta^{(3)}(\mathbf{r})\mathbf{S}\cdot\mathbf{p} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{p}\delta^{(3)}(\mathbf{r})\right) \tag{18}$$

em que $\mathbf{S}$ e $\mathbf{p}$ são os operadores spin e momento do elétron e o núcleo é suposto que esteja situado na origem. Como resultado, o estado fundamental de átomos alcalinos, usualmente caracterizado por $|n, l, j, m\rangle$, na verdade contem contribuições minúsculas de outros autoestados como o seguinte:

$$|n, l, j, m\rangle \to |n, l, j, m\rangle + \sum_{n'l'j'm'} C_{n'l'j'm'}|n', l', j', m'\rangle. \tag{19}$$

Com base apenas em considerações de simetria, o que você pode dizer sobre $\{n',l',j',m'\}$ que dão contribuições não nulas?

Alterações: 2018/04/27: Questão 1 foi reescrita. Incluída na questão 5 a definição do traço parcial. Questão 29 agora tem item "b".