Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Programa de Pós-Graduação em Física
Mecânica Quântica I (FSC3310000) — Prof. Emmanuel G. de Oliveira
Lista de problemas I — Versão de 28 de março de 2018

(1) (a) Encontre $[A,B^2]$ e $[A^2,B^2]$ em termos do comutador $[A,B]$ e de anticomutadores. (b) No caso de x e p_x, quais são os resultados? (c) No caso de S_x e S_y, quais são os resultados?

(2) [Sakurai 1.7] Considere um espaço de kets gerado pelos autoestados $\{|a'\rangle\}$ de um operador hermitiano A. Não há degenerescência.
(a) Prove que

$$\prod_{a'}(A - a') \tag{1}$$

é o operador nulo.
(b) Qual é a significância de

$$\prod_{a''\neq a'} \frac{A - a''}{a' - a''}? \tag{2}$$

(c) Ilustre (a) e (b) usando A igualado a S_z de um sistema de spin 1/2.

(3) Encontre (a) $[x,G(p_x)]$ e (b) $[F(x), p_x]$.

(4) [Sakurai 1.13, adap.] Um feixe de átomos de spin 1/2 passa por uma série de três experimentos do tipo de Stern–Gerlach:
(i) O primeiro aceita $S'_z = \hbar/2$ e rejeita $S'_z = -\hbar/2$. O resultado deste experimento é normalizado à unidade.
(ii) O segundo aceita $S'_n = \hbar/2$ e rejeita $S'_n = -\hbar/2$, em que S_n é o autovalor do operador $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$, dado que $\mathbf{n}$ está no plano zx e faz ângulo θ com o eixo z positivo.
(iii) O terceiro aceita $S'_z = -\hbar/2$ e rejeita $S'_z = \hbar/2$.
(a) Qual é a intensidade final do feixe?
(b) Como devemos orientar o segundo aparato de medidase nós queremos maximizar a intensidade do feixe final com $S'_z = -\hbar/2$?

(5) Considere o operador representado pela matriz abaixo:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(a) Mostre se esse operador é hermitiano ou não.
(b) Mostre se esse operador é unitário ou não.
(c) Encontre os autovalores deste operador.
(d) Se este operador é o hamiltoniano de algum sistema, como seria a evolução de um estado arbitrário deste sistema?

(6) [Sakurai 2.18, adap.] No contexto do oscilador harmônico simples, define-se o estado coerente $|\lambda\rangle$ por meio da relação:

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \tag{4}$$

em que a é o operador de aniquilação e λ é um autovalor complexo.
(a) Mostre que

$$\mathrm{e}^{\frac{-|\lambda|^2}{2}} \mathrm{e}^{\lambda a^\dagger}|0\rangle \tag{5}$$

é um estado coerente normalizado.
(b) Mostre que para este estado vale o princípio de incerteza mínima, usando que

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}(a + a^\dagger) \tag{6}$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}(-a + a^\dagger) \tag{7}$$

(7) [Weinberg 3.4] Suponha que um operador linear X que não é hermitiano mas comuta com o seu adjunto $X^\dagger$. O que pode ser dito sobre os autovalores de X e $X^\dagger$? O que pode ser dito sobre o produto interno entre dois autoestados de X com autovalores diferentes?

(8) [Sakurai 2.21, adap.[1]] Uma partícula está em um poço quadrado infinito com potencial $V(x) = 0$ para $0 < x < L$ e infinito nos outros casos. A tempo inicial ($t = 0$), a partícula está localizada em $x = L/2$.
(a) Qual será a probabilidade relativa para encontrar a partícula nos vários autoestados de energia a $t = 0$?
(b) Escreva a função de onda para $t \geq 0$.

(9) [Landau & Lifshitz 17.1, adapt.] No caso de uma onda plana tridimensional, encontre a lei de transformação da função de onda para uma transformação galileana.

(10) [Sakurai & Napolitano 2.4] Deduza a probabilidade de oscilação do neutrino

$$1 - \operatorname{sen}^2(2\theta)\operatorname{sen}^2\left(\delta m^2 c^4 \frac{L}{4E\hbar c}\right) \tag{9}$$

(11) [Bransden & Joachain] Encontre a equação da continuidade no caso de potencial complexo e a interprete fisicamente.

(12) Escreva a equação de Schrödinger para uma partícula presa em um anel fino. Encontre os autovalores e os autovetores de energia.

[1] Se n é inteiro:

$$\int_0^L x\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L^2}{4} \quad \text{e} \quad \int_0^L x^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L^3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}\right) \tag{8}$$

(13) Suponha que exista um operador T observável tal que $[T,H] = -i\hbar$, em que H é o operador hamiltoniano. (a) Se $|a'\rangle$ é um autoestado de energia com autovalor $E_{a'}$, mostre que $\exp(i\epsilon T/\hbar)|a'\rangle$ também é um autoestado e encontre sua energia. (b) Argumente que o hamiltoniano em questão não é limitado por baixo, ou seja, não há energia mínima.

(14) [Sakurai 1.10] Dado o hamiltoniano:

$$H = \epsilon(|1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|) \tag{10}$$

encontre (a) as energias e (b) os autoestados normalizados correspondentes.

(15) [Sakurai 1.31] Usando

$$[\mathbf{r}, \mathcal{T}(d\mathbf{r}')] = d\mathbf{r}' \tag{11}$$

e

$$[\mathbf{p}, \mathcal{T}(d\mathbf{r}')] = 0, \tag{12}$$

mostre que o efeito resultante de translações infinitesimais do ket $|\alpha\rangle \to \mathcal{T}(d\mathbf{r}')|\alpha\rangle$ sobre os valores esperados é:
(a) do operador momento: $\langle \mathbf{p}\rangle \to \langle \mathbf{p}\rangle$.
(b) do operador posição: $\langle \mathbf{r}\rangle \to \langle \mathbf{r} + d\mathbf{r}'\rangle$.

(16) [Sakurai 2.17, adap.] No contexto do oscilador harmônico simples, mostre que:

$$\langle 0|\exp(ikx)|0\rangle = \exp(-k^2\langle 0|x^2|0\rangle/2) \tag{13}$$

em que x é o operador posição.

(17) É dado o estado $|\alpha\rangle = |S_z;+\rangle + |S_x;+\rangle$; quais são os valores esperados de S_x, S_y e S_z?

(18) [Sakurai 1.8, adap.] Usando a ortonormalidade de $|+\rangle$ e $|-\rangle$, mostre que:

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar S_k \quad \text{e} \quad \{S_i,S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij} \tag{14}$$

usando $S_x = (\hbar/2)(|+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle -|), S_y = \cdots$.

(19) [Sakurai 1.19] (a) Compute

$$\left\langle(\Delta S_x)^2\right\rangle = \langle S_x^2\rangle - \langle S_x\rangle^2 \tag{15}$$

em que o valor esperado é em relação ao estado S_z+. Usando seu resultado, confirme a relação de incerteza generalizada:

$$\left\langle(\Delta A)^2\right\rangle\left\langle(\Delta B)^2\right\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 \tag{16}$$

com $A \to S_x$ e $B \to S_y$.
(b) Confirme a relação de incerteza com $A \to S_x$ e $B \to S_y$ para o estado S_x+.

(20) [Sakurai 1.33-a-i] Prove o seguinte:

$$\langle p'|x|\alpha\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle. \tag{17}$$

(21) (a) Encontre os autovalores das matrizes σ_+ e

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

(b) Encontre os autovetores dessas matrizes.

(22) [Sakurai 2.15] Considere a função, conhecida como função de correlação, definida por

$$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle, \tag{19}$$

em que $x(t)$ é o operador posição na descrição de Heisenberg. Calcule explicitamente a função de correlação para o estado fundamental de um oscilador harmônico simples unidimensional.

(23) [Sakurai 2.16] Considere de novo um oscilador harmônico simples unidimensional. Faça o seguinte algebricamente, isto é, sem usar funções de onda:
(a) Construa uma combinação linear de $|0\rangle$ e $|1\rangle$ de tal maneira que $\langle x\rangle$ é o maior possível.
(b) Suponha que o oscilador está no estado construído em (a) ao tempo $t = 0$. Qual é o vetor de estado para $t > 0$ na descrição de Schrödinger?

(24) [Sakurai 1.21, adapt.] Uma partícula está em um poço quadrado infinito com potencial $V(x) = 0$ para $0 < x < L$ e infinito nos outros casos. Encontre

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p_x)^2\rangle \tag{20}$$

para o estado fundamental (a) e para os estados excitados (b).

(25) Considere o hamiltoniano dependente do tempo:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-i\omega t} \\ \mathrm{e}^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

(a) Encontre os autovalores dependentes do tempo. (b) Encontre a transformação unitária que

(26) [Sakurai 1.28, adapt.] Sejam x e p_x operadores quânticos de posição e momento linear em uma dimensão. (a) Encontre o comutador:

$$\left[x, \exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)\right] \tag{22}$$

(b) Prove que

$$\exp\left(\frac{ip_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle \tag{23}$$

é autoestado de posição x e encontre o autovalor correspondente.

(27) [Sakurai 2.1, adapt.] Dado o hamiltoniano:

$$H = \omega S_z \tag{24}$$

(a) Encontre a equação de Heisenberg para os operadores S_y e S_z.

(b) Encontre a dependência temporal dos operadores $S_y(t)$ e $S_z(t)$ a partir da equação de Heisenberg.

(28) [Sakurai 2.5, adapt.] Considere uma partícula em uma dimensão cujo o hamiltoniano é dado por:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + V(x) \tag{25}$$

(a) Calcule $[[H,x],x]$.
(b) Prove que:

$$\sum_{a'} |\langle a''|x|a'\rangle|^2 (E_{a'} - E_{a''}) = \frac{\hbar^2}{2m} \tag{26}$$

em que $|a'\rangle$ é um autoestado de energia $E_{a'}$.

(29) (a) Mostre que a distribuição de quasiprobabilidade de Wigner:

$$W(x,p_x) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int d\xi\, \mathrm{e}^{-\xi p_x/\hbar}\psi^*(x-\xi/2)\psi(x+\xi/2) \tag{27}$$

quando integrada em p_x resulta na densidade de probabilidade de que a partícula seja encontrada em x. (b) Demonstre o resultado no caso de integração em x.

(30) [Sakurai 2.9, adapt.] Uma caixa contendo uma partícula está dividida entre compartimentos esquerdo e direito por uma separação fina. Se a partícula está no compartimento direito ou esquerdo, seu estado é representado pelo autoket de posição $|R\rangle$ ou $|L\rangle$, respectivamente. A partícula pode tunelar pela separação; este tunelamento é caracterizado pelo hamiltoniano:

$$H = \Delta\left(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|\right) \tag{28}$$

em que Δ é um número real com dimensão de energia.
(a) Encontre os autoestados normalizados e os autovalores de energia.
(b) Suponha que ao tempo $t = 0$ a partícula está no compartimento direito com certeza. Qual é a probabilidade de observar a partícula no lado esquerdo como função do tempo?

(31) [Sakurai 1.14] Um certo observável em mecânica quântica tem uma representação por matriz 3×3 como:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

(a) Encontre os autovalores e os autovetores normalizados deste operador. Há alguma degenerescência?
(b) Dê um exemplo físico em que tudo isso é relevante.

(32) [Sakurai 1.21, adap.] Uma partícula está em um poço quadrado infinito com potencial $V(x) = 0$ para $0 < x < L$ e infinito nos outros casos. Encontre

$$\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p_x)^2\rangle \tag{30}$$

para o estado fundamental (a) e para os estados excitados (b).

(33) (a) Encontre a distribuição de Wigner no caso do estado fundamental do oscilador harmônicos. (b) Encontre a distribuição de Wigner no caso do primeiro estado excitado do oscilador harmônico e mostre que ela pode ser negativa.

(34) [Sakurai 2.3] Um elétron está sujeito a um campo magnético uniforme e independente do tempo de intensidade B com orientação do eixo z positivo. A $t = 0$ sabe-se que o elétron está em um autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ com autovalor $\hbar/2$, em que $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário pertencente ao plano xz que faz ângulo β com o eixo z.
(a) Obtenha a probabilidade de encontrar o elétron no estado $S_x' = \hbar/2$ como uma função do tempo.
(b) Encontre o valor esperado de S_x como uma função do tempo.
(c) Confira as suas respostas com os resultados esperados para (i) $\beta = 0$ e (ii) $\beta = \pi/2$.

(35) [Sakurai 1.9, adap.] Resolvendo a equação de autovetores, construa $|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle$ tal que:

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}};+\rangle \tag{31}$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário com ângulo azimutal ϕ e ângulo axial θ.

(36) [Sakurai 1.12, adap.] Sabe-se que um sistema de spin 1/2 está em um autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ com autovalor $\hbar/2$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário no plano xz que faz um ângulo γ com o eixo z positivo.
(a) Suponha que S_x é medido. Qual é a probabilidade de obter-se $+\hbar/2$?
(b) Calcule a dispersão em S_x, isto é,

$$\langle(S_x - \langle S_x\rangle)^2\rangle \tag{32}$$

(c) Confira suas respostas para os casos especiais $\gamma = 0, \pi/2$ e π.

(37) [Sakurai 1.15, adap.] Sejam A e B observáveis. Suponha que os autoestados simultânos de A e B formam um conjunto completo de kets de base. Podemos sempre concluir que $[A,B] = 0$?Se a sua resposta for sim, prove a igualdade. Se a sua resposta é não, dê um contraexemplo.

(38) [Sakurai 2.10, adap.] Usando o oscilador harmônico simples unidimensional como exemplo, discuta como (a) as variáveis dinâmicas x e p_x e (b) o vetor de estado mais geral evoluem como o tempo em cada uma das descrições.

(39) [Sakurai 1.16, adap.] Dois operadores hermitianos anticomutam $\{A,B\} = 0$. É possível existir um autoestado simultâneo de A e B? Prove ou exemplifique sua resposta.

(40) [Sakurai 2.11, adap.] Considere uma partícula sujeita à o potencial de oscilador harmônico simples unidimensional. Suponha que em $t = 0$ o vetor de estado é dado por:

$$\exp\left(\frac{-ip_x a}{\hbar}\right)|0\rangle \tag{33}$$

em que a é um número com dimensão de comprimento. Usando a descrição de Heisenberg, calcule o valor esperado $\langle x\rangle$ para $t \geq 0$.

(41) [Sakurai 1.17, adap.] Sabe-se que dois observáveis A_1 e A_2, que não envolvem o tempo explicitamente, não comutam: $[A_1,A_2] \neq 0$. Ainda assim, sabe-se que ambos comutam com o hamiltoniano: $[A_1,H] = 0$, $[A_2,H] = 0$. Prove que os autoestados de energia são, em geral, degenerados. Existem exceções?

(42) [Sakurai 2.12, adap.] Para um oscilador harmônico simples unidimensional, em $t = 0$, é dado o estado:

$$\exp\left(\frac{-ip_x a}{\hbar}\right)|0\rangle \tag{34}$$

(a) Encontre a função de onda no espaço de posição.
(b) Obtenha uma expressão simples para a probabilidade de que o sistema seja encontrado no estado fundamental pata $t = 0$. Esta probabilidade muda para $t > 0$?

(43) [Sakurai 1.18, adap.] (a) Mostre que a igualdade na relação de incerteza é válida se o estado em questão satisfaz $\Delta A|\alpha\rangle = i\lambda\Delta B|\alpha\rangle$ com λ real.
(b) Prove que $\langle x'|\Delta x|\alpha\rangle = i\lambda\langle x'|\Delta p|\alpha\rangle$ para o pacote de onda gaussiano:

$$\langle x'|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi d^2}}\exp\left(\frac{i\langle p\rangle x'}{\hbar} - \frac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4d^2}\right) \tag{35}$$

que satisfaz a relação de incerteza mínima.

(44) [Sakurai 2.20, adap.] Considere uma partícula de massa m sujeita ao seguinte potencial unidimensional:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{kx^2}{2} & \text{para } x > 0 \\ \infty & \text{para } x < 0 \end{cases} \tag{36}$$

(a) Qual é a energia do estado fundamental?
(b) Qual é o valor esperado $\langle x^2\rangle$ para o estado fundamental?

(45) [Sakurai 1.23, adap.] Considere um espaço de kets tridimensional. Os operadores A e B são representados por:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \qquad A \doteq \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

com a e b reais.
(a) Obviamente o espectro de A é degenerado. O espectro de B também o é?
(b) Mostre que A e B comutam.
(c) Encontre um conjunto de autoestados que são simultaneamente autoestados de A e B. Especifique os autovalores de$A$ e B para cada um dos autoestados. A sua especificação de valores caracteriza completamente cada autoket?

(46) [Sakurai 2.22, adap.] Considere uma partícula em uma dimensão ligada a o centro fixo por um potencial de função δ:

$$V(x) = -v_0\delta(x) \tag{38}$$

em que v_0 é real e positivo. Encontre a função de onda e energia de ligação do estado fundamental. Existem estados ligados excitados?

(47) [Sakurai 1.30, adap.] O operador translação para um deslocamento espacial finito é dado por

$$\mathcal{T}(\mathbf{l}) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{l}}{\hbar}\right) \tag{39}$$

em que $\mathbf{p}$ é o operador momento.
(a) Calcule $[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{l})]$.
(b) Usando o resultado do item “a” ou não demonstre como o valor esperado $\langle\mathbf{x}\rangle$ muda sob translação.